# 40 ans de recherche en logique possibiliste - Une vue d'ensemble

Didier Dubois Henri Prade

IRIT, CNRS & Université de Toulouse,

- Une rapide promenade dans 40 ans de recherche
- chronologique
- en insistant sur les idées
  - Pourquoi la théorie des possibilités ?
  - Logique possibiliste
  - Conditionnement, réseaux possibilistes
  - Extensions
  - Quelques applications

## Intuitions et postulats

- Une échelle de certitude totalement ordonnée $L$ allant de certain (1) à incertain (0).
- Une fonction d'ensemble $N : 2^U \to L$ qui capture l'information incomplète et l'ignorance:
  - Certitude de $A$: $N(A) = 1$;
  - Ignorance totale quant à $A$: $N(A) = N(\bar{A}) = 0$
  - La fonction $\Pi(A) = 1 - N(\bar{A})$ exprime l'idée de plausibilité.
- Ces fonctions sont monotones avec l'inclusion :
  si $A$ implique $B$ ($A \subseteq B$) alors $N(B) \geq N(A)$
  $\Pi(B) \geq \Pi(A)$

**Remarque**

*La fonction de probabilité ne sait pas capturer l'ignorance.*

# *Intuitions et postulats*

- La contrainte $N(A) \geq \alpha > 0$ exprime une croyance acceptée, tenue pour vraie tant qu'elle n'est pas contredite par les faits.
- Le coefficient $\alpha$ est d'autant plus faible qu'on sera prêt à l'abandonner plus vite si besoin.
- On ne peut pas accepter $A$ et $B$ comme vraies si elles sont contradictoires: $N(A) > 0$ implique $N(\bar{A}) = 0$.
- Si on accepte deux propositions cohérentes comme vraies on doit accepter leur conjonction:
$N(A) \geq \alpha, N(B) \geq \alpha, A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow N(A \cap B) \geq \alpha$.

**Conséquences**

- La fonction de certitude satisfait l'axiome $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$: c'est la théorie des possibilités.
- La famille de propositions $\{A : N(A) \geq \alpha\}$ est fermée déductivement: *compatibilité avec la déduction en logique*.

# *Intuitions et postulats*

- La contrainte $N(A) \geq \alpha > 0$ exprime une croyance acceptée, tenue pour vraie tant qu'elle n'est pas contredite par les faits.
- Le coefficient $\alpha$ est d'autant plus faible qu'on sera prêt à l'abandonner plus vite si besoin.
- On ne peut pas accepter $A$ et $B$ comme vraies si elles sont contradictoires: $N(A) > 0$ implique $N(\bar{A}) = 0$.
- Si on accepte deux propositions cohérentes comme vraies on doit accepter leur conjonction:
  $N(A) \geq \alpha, N(B) \geq \alpha, A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow N(A \cap B) \geq \alpha$.

**Conséquences**

- La fonction de certitude satisfait l'axiome
  $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$: c'est la théorie des possibilités.
- La famille de propositions $\{A : N(A) \geq \alpha\}$ est fermée déductivement: *compatibilité avec la déduction en logique*.

# *Théorie des possibilités*

- On construit des mesures de possibilité $\Pi$ et de nécessité $N$ à partir de distributions de possibilité $\pi : U \to L$.
- $\pi$ est un sous-ensemble non vide de valeurs ou d'états plus ou moins possibles $(\exists u^* : \pi(u^*) = 1)$

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) \text{ (L. A. Zadeh, 1978)}$$

$$N(A) = 1 - \Pi(\overline{A}) \quad \text{(D.P. 1979)}$$

On a les propriétés caractéristiques :
$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$; $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$

- Dans le cas numérique ($L = [0, 1]$): Fonctions de croyance et de plausibilité de Shafer (1976)
- Dans le cas tout ou rien ($L = \{0, 1\}$): un parfum de logique modale.

# Un pionnier de la théorie des possibilités

1948 - 1962: G. L. S. Shackle

- Echelle de surprise $S$ de normal (0) à totalement surprenant (1)
- Le degré de surprise $Sur(A)$ vérifie l'axiome:

$$Sur(A \cup B) = \min(Sur(A), Sur(B))$$

- $Sur(A) = 1 - \Pi(A)$, $Sur(A) = \min_{x \in A} 1 - \pi(x)$
  surprise = impossibilité

## De l'inférence à la logique possibiliste

$p, q$ formules de la logique propositionnelle:

- 1982 modus ponens pondéré
  $N(p) \geq \alpha, N(p \to q) \geq \beta \Rightarrow N(q) \geq \min(\alpha, \beta)$ (P.)

- On code $N(p) \geq \alpha$ par la paire $(p, \alpha)$

  $(\neg p \vee q, \alpha), (p \vee r, \beta) \vdash (q \vee r, \min(\alpha, \beta))$ (résolution)

  (Farreny - P., 1986)

## *Syntaxe de la logique possibiliste* $L\Pi$

- Une base en $L\Pi$ est une conjonction de formules pondérées (un S.E.F de formules):
  $$K = \{(p_i, \alpha_i), i = 1, ..., m\}$$
- Axiomes de la logique propositionnelle $(p, 1)$, affaiblissement du poids, + modus ponens pondéré
- *Met en oeuvre le principe disant que de degré de validité dune chaine de déductions est celle du maillon le plus faible* (Rescher, 1976)
- $K \vdash (p, \alpha)$ ssi $K_\alpha \vdash p$, où $K_\alpha = \{p_i : (p_i, \alpha_i) \in K, \alpha_i \geq \alpha\}$. (l'$\alpha$-coupe de $K$)

# Sémantique et complétude de la logique possibiliste

- Une base $K = \{(p_i, \alpha_i), i = 1, ..., m\}$ définit un sous-ensemble flou de modèles possibles:

$$\pi_{(p_i,\alpha_i)}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \models p_i \\ 1 - \alpha_i \text{ sinon} \end{cases} \qquad \pi_K(\omega) = \min_{i=1}^{m} \pi_{(p_i,\alpha_i)}(\omega)$$

- Inférence sémantique: $K \models (p, \alpha) \iff \pi_K \leq \pi_{(p,\alpha)}$
- *L*Π est saine et complète par rapport à cette sémantique (D.- Lang - P., 1990)

$\neq$ **probabilités** la règle suivante est saine mais pas complète :
$Prob(p) \geq \alpha, Prob(p \to q) \geq \beta \Rightarrow Prob(q) \geq \max(0, \alpha + \beta - 1)$

# *Sémantique et complétude de la logique possibiliste*

- Une base $K = \{(p_i, \alpha_i), i = 1, ..., m\}$ définit un sous-ensemble flou de modèles possibles:

$$\pi_{(p_i,\alpha_i)}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \models p_i \\ 1 - \alpha_i \text{ sinon} \end{cases} \qquad \pi_K(\omega) = \min_{i=1}^{m} \pi_{(p_i,\alpha_i)}(\omega)$$

- Inférence sémantique: $K \models (p, \alpha) \iff \pi_K \leq \pi_{(p,\alpha)}$
- $L\Pi$ est saine et complète par rapport à cette sémantique (D.- Lang - P., 1990)

$\neq$ **probabilités** la règle suivante est saine mais pas complète :
$Prob(p) \geq \alpha, Prob(p \to q) \geq \beta \Rightarrow Prob(q) \geq \max(0, \alpha + \beta - 1)$

# *Sémantique et complétude de la logique possibiliste*

- Une base $K = \{(p_i, \alpha_i), i = 1, ..., m\}$ définit un sous-ensemble flou de modèles possibles:

$$\pi_{(p_i,\alpha_i)}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \models p_i \\ 1 - \alpha_i \text{ sinon} \end{cases} \qquad \pi_K(\omega) = \min_{i=1}^{m} \pi_{(p_i,\alpha_i)}(\omega)$$

- Inférence sémantique: $K \models (p, \alpha) \iff \pi_K \leq \pi_{(p,\alpha)}$
- $L\Pi$ est saine et complète par rapport à cette sémantique (D.- Lang - P., 1990)

$\neq$ **probabilités** la règle suivante est saine mais pas complète :
$Prob(p) \geq \alpha, Prob(p \rightarrow q) \geq \beta \Rightarrow Prob(q) \geq \max(0, \alpha + \beta - 1)$

## *Incohérence graduelle*

En $L\Pi$, la présence de contradictions dans la base $K$ ne trivialise pas toujours l'inférence.

- niveau d'incohérence d'une base K:
  $inc(K) = \max\{\alpha | K \vdash (\bot, \alpha)\} = 1 - \max_\omega \pi_K(\omega)$
- Les formules $(p_i, \alpha_i)$ dans $K$ telles que $\alpha_i > inc(K)$ sont à l'abri de l'incohérence
- Inférence non-triviale: $K \vdash (p, \alpha)$ avec $\alpha > inc(K)$
- Cela revient à éliminer de $K$ les formules $(p_i, \alpha_i)$ avec $\alpha_i \leq inc(K)$.

# *Logique possibiliste généralisée ($L\Pi G$)* *(D. - P. - Schockaert, 2017)*

- Logique possibiliste de base: des conjonctions de formules pondérées $\bigwedge_i (p_i, \alpha_i)$ exprimant la contrainte $N(p_i) \geq \alpha_i$
- Si on traite $N(p) \geq \alpha$ comme une assertion vraie ou fausse, on peut étendre le langage à d'autres connecteurs, pour inclure les formules du type $\neg(p, \alpha)$ ou $(p, \alpha) \vee (q, \beta)$.
  (Par exemple, $\neg(p, \alpha)$ exprime $\Pi(\neg p) > 1 - \alpha$)
- **Syntaxe:** $(p, \alpha)$ est noté $\mathbf{N}_\alpha(p)$ où $p$ est une formule d'un langage propositionnel $\mathcal{L}$, $\alpha$ appartient à une échelle finie $L$
- Le langage de $L\Pi G$ est un langage propositionnel dont les formules atomiques sont $\{\mathbf{N}_\alpha(p) : p \in \mathcal{L}, \alpha \neq 0 \in L\}$

*C'est un fragment de langage de logique modale.*

# Logique Possibiliste Géneralisée : axiomes et sémantique

- Les axiomes de $L\Pi G$ sont ceux de la logique propositionnelle + axiomes K et D de la logique modale, et la nécessitation
- Les formules de $L\Pi G$ sont évaluées sur des distributions de possibilité.
  (Par exemple, $\pi \models (p, \alpha) \vee (q, \beta)$ ssi $N(p) \geq \alpha$ ou $N(q) \geq \beta$)
- $L\Pi G$ est saine et complète.
  - Les axiomes K et D garantissent la sémantique possibiliste.
  - Si $L = \{0, 1\}$, c'est un fragment de la logique modale KD.
  - Ce n'est qu'une logique propositionnelle à deux niveaux.

# *Conditionnement qualitatif possibiliste*

La possibilité conditionnelle $\Pi(p|q)$ est la plus grande solution de l'identité

$$\Pi(p \wedge q) = \min(x, \Pi(q))$$

Soit (D.P. 1985):

$$\Pi(q|p) = \begin{cases} 1 \text{ si } \Pi(p) = \Pi(p \wedge q) \\ \Pi(p \wedge q) \text{ sinon.} \end{cases} \quad ; \quad N(p|q) = 1 - \Pi(\neg q).$$

- Un calcul matriciel: $\begin{bmatrix} \Pi(q) \\ \Pi(\neg q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi(q|p) & \Pi(q|\neg p) \\ \Pi(\neg q|p) & \Pi(\neg q|\neg p) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \Pi(p) \\ \Pi(\neg p) \end{bmatrix}$

  $\otimes$ max-min product (D.-P. 1986)

- moteur d'inférence TAIGER

  (Farreny - P. - Wyss, 1986)

## *Systèmes de règles en parallèle*

- L'inférence de chaque couche de règles parallèles peut être vue comme le résultat d'un *produit de matrices* min-max dont la sortie est une *distribution de possibilité*
- Plusieurs couches de règles, utilisées en chainage avant, correspondent à une cascade *de tels produits de matrices*
- Developpé à des fins d'*explications*
  *(Farreny - P., 1989-1990)*
- Oublié pendant 30 ans

# *Réseaux possibilistes*

- Plus généralement on a une contrepartie possibiliste des réseaux bayésiens
- $\pi(X_1,\ldots,X_n) = \pi(X_n | X_1,\ldots,X_{n-1}) \star \ldots \star \pi(X_2 | X_1) \star \pi(X_1)$ avec $\star = \min$ ou produit
- se simplifie avec des relations d'indépendance
- différentes formes d'indépendance
  dans le cadre possibiliste (Benferhat, Ben Amor, Meloulli, D. P. 2002; D. P. Herzig Farinas del Cerro, 1999)
- les réseaux possibilistes peuvent être directement traduits en bases possibilistes et vice-versa (Benferhat, Garcia, D.-P., 2001)

# *Logique possibiliste symbolique*

- gérer les niveaux de certitude des formules en logique possibiliste de manière *symbolique*
- Les valeurs des niveaux de certitude associés aux formules (supposées appartenir à une échelle totalement ordonnée) sont inconnues,
  mais l'ordre relatif entre certaines d'entre elles peut être partiellement connu
- logique propositionnelle typée, où les formules possibilistes sont des clauses avec des littéraux spéciaux qui se réfèrent aux niveaux.
  les contraintes sur l'ordre de certains des niveaux forment une base auxiliaire (Benfehrat-P., 2005/6)
  Voir aussi Cayrol, Dubois, Touazi (J. Log. Comput, 2018)

# Logique possibiliste basée sur des treillis

On peut généraliser $L\Pi$ au cas où l'échelle de certitude $L$ est un treillis distributif complet pseudo-complémenté.

- les poids sont des ensembles éventuellement flous: périodes de temps, ensembles de sources, ou groupes d'agents
  - $(p, F)$ : chaque agent croit $p$ avec une certitude au moins $\mu_F(a)$
  - $(p, \alpha/A)$ : agents de $A$ certains de $p$ au niveau au moins $\alpha$

  Modus Ponens: $(p, F), (p \to q, G) \vdash$ (q, F $\cap G$)
- Sémantique : fonctions de possibilité, nécessité à valeur ensembliste
- La structure de treillis altère la notion de cohérence:
  cohérence collective: $\exists$ une interprétation que tous les agents croient possible,
  coherence individuelle seulement: la base $K = \{(p, A), (\neg p, A^c)\}$

## *Logique possibiliste positive*

- En théorie des possibilités, 2 autres fonctions :
  $\Delta(A) = \inf_{u \in A} \pi(u)$ et son dual $\nabla(A) = 1 - \Delta(\overline{A})$
  $\Delta(A)$ estime à quel point *tous* les états dans $A$ sont possibles. $\Delta$ mesure de possibilité *forte*
- Propriété : $\Delta(A \cup B) = \min(\Delta(A), \Delta(B))$ (D.-P. 1992)
- Version logique: $\Delta(p) \geq \gamma$ exprime que tout modèle de $p$ est au moins possible au degré $\gamma$
  noté $[p, \gamma]$; c'est une information positive.
- Résolution: $[\neg p \wedge q, \gamma], [p \wedge r, \gamma']) \vdash [q \wedge r, \min(\gamma, \gamma')]$
- Une base $P = \{[q_j, \gamma_j] | j = 1, k\}$ induit une distribution $\delta_P(\omega) = \max_{j=1,k} \delta_{[q_j, \gamma_j]}(\omega)$ (e.g. règles floues de Mamdani)
- application au raisonnement sur les désirs (D. Lorini, P. Minds and Mach. 2017)

# Logique possibiliste positive

- En théorie des possibilités, 2 autres fonctions :
  $\Delta(A) = \inf_{u \in A} \pi(u)$ et son dual $\nabla(A) = 1 - \Delta(\overline{A})$
  $\Delta(A)$ estime à quel point *tous* les états dans $A$ sont possibles. $\Delta$ mesure de possibilité *forte*
- Propriété : $\Delta(A \cup B) = \min(\Delta(A), \Delta(B))$ (D.-P. 1992)
- Version logique: $\Delta(p) \geq \gamma$ exprime que tout modèle de $p$ est au moins possible au degré $\gamma$
  noté $[p, \gamma]$; c'est une information positive.
- Résolution: $[\neg p \wedge q, \gamma], [p \wedge r, \gamma']) \vdash [q \wedge r, \min(\gamma, \gamma')]$
- Une base $P = \{[q_j, \gamma_j] | j = 1, k\}$ induit une distribution
  $\delta_P(\omega) = \max_{j=1,k} \delta_{[q_j, \gamma_j]}(\omega)$ (e.g. règles floues de Mamdani)
- application au raisonnement sur les désirs (D. Lorini, P. Minds and Mach. 2017)

# *Incohérence et raisonnement non monotone*

- lorsque des informations sûres sont reçues dans une base de $L\Pi$, le niveau d'incohérence de la base possibiliste ne peut pas diminuer
- et s'il augmente strictement, certaines inférences qui étaient valides auparavant sont maintenant noyées sous le nouveau niveau d'incohérence de la base et ne sont plus possibles

# Raisonnement par défaut

Une règle par défaut est une assertion conditionnelle normalement vraie, mais qui admet des exceptions.

- Une règle par défaut : “si $p$ est vrai alors normalement $q$ aussi” ($p \Rightarrow q$) se représente en théorie des possibilités par la contrainte:

$$\Pi(p \wedge q) > \Pi(p \wedge \neg q) \iff N(q|p) > 0$$

(les situations où $p \wedge q$ est vrai sont plus normales que celles où $p \wedge \neg q$ est vrai)

- Une base de règles par défaut $\mathcal{D} = \{p_i \Rightarrow q_i, i = 1, \ldots n\}$ correspond à un ensemble de contraintes $\Pi(p_i \wedge q_i) > \Pi(p_i \wedge \neg q_i)$.

## Raisonnement par défaut en logique possibiliste

On peut stratifier l'ensemble des défauts selon leur spécificité (Benferhat - D. - P., 1992):

- Calculer la moins informative des distributions $\pi^*$ compatibles avec les contraintes induites par $\mathcal{D}$
- Attacher une priorité $\alpha_i = N^*(\neg p_i \vee q_i)$ à chaque règle. (défauts plus spécifiques $\Rightarrow$ niveaux plus élevés)
- Construire la base possibiliste $K_{\mathcal{D}} = \{(\neg p_i \vee q_i, \alpha_i), i = 1, n\}$

On peut prouver (Benferhat - D. - P., 1997):

$$\mathcal{D} \vdash_{KLM} p \Rightarrow q \text{ ssi } K_{\mathcal{D}} \cup \{(p, 1)\} \vdash (q, \alpha) \text{ avec } \alpha > inc(K_{\mathcal{D}} \cup \{p\})$$

KLM = règles d'inférence du systeme P + monotonie rationelle pour une base de défauts selon Kraus Lehmann Magidor (1980's)

# Autres applications de la logique possibiliste

- Inférences plus raffinées tolérant l'incohérence: récupérer des formules noyées sous le niveau d'incohérence (Benferhat .
- Révision des croyances guidée par une relation de necessité induite par les postulats bien connus de la révision (Alchourròn - Gärdenfors - Makinson)
- Fusion de bases en $L\Pi$: expression syntaxique de la combinaison de distributions de possibilit´´e par des opérations de type t-normes, conormes etc.
- bases de données: Les opérations de propagation de l'incertain en $L\Pi$ sont un exemple de calcul de provenance. On peut aussi representer des dépendances fonctionnelles incertaines.

# *Modélisation des préférences et décision qualitative*

- Une formule de $L\Pi$ $(p, \alpha)$ peut représenter un objectif $p$ avec un niveau de priorité $\alpha$.

  "Je préfère $p$ à $q$ et $q$ à $r$"

  $P = \{(p \vee q \vee r, 1), (p \vee q, 1 - \gamma), (p, 1 - \beta)\}$ avec $\gamma < \beta < 1$
- On peut représenter une fonction d'utilité et une fonction d'incertitude par des bases en $L\Pi$ (D., Le Berre, P., Sabbadin 1999):
  - Base de connaissances: $K$
  - Bases de préférences: $P$
- l'utilité pessimiste $u_*(d)$ de la décision $d$ est le maximum $\alpha \in L$ tel que

$$K_\alpha \wedge d \vdash P_{\underline{1-\alpha}},$$

- l'utilité optimiste $u^*(d)$ de $d$ est le maximum $1 - \alpha \in L$ tel que:

$$K_{\underline{\alpha}} \wedge d \wedge P_{\underline{\alpha}} \not\equiv \perp$$

# *Autres applications de la logique possibiliste*

- Logiques de description: gestion de l'incertitude dans DL-lite sans coût de calcul supplémentaire; réparation polynomiale d'une Abox (Benferhat, et al.)
- La $L\Pi G$ avec $|L| = 3$ peut coder les programmes par ensembles-réponses (ASP) (D. P. Schockaert, 2012)
- La $L\Pi G$ avec $|L| = 2$ est un fragment de KD qui capture beaucoup de logiques tri-valuées de l'incertain (Kleene, Lukasiewicz...) et paraconsistantes (Priest). (Ciucci, D. 2013, 2015)
- Argumentation : logique des raisons: $(p, x)$, $x$ est une raison pour $p$.
- Apprentissage :
  - Programmation logique inductive pondérée (Serrurier et al. 2002),
  -réseau neuro-symbolique induit par une cascade de produits minmax de matrices induites par des règles possibilistes (Baaj, 2021)

# Conclusion

Cette revue de travaux concerne essentiellement la théorie des possibilités qualitative.

- Co-existence of différents types de représentation :
  - distribution de possibilité
  - logique possibiliste $N$
  - logique possibiliste $\Delta$
  - réseau possibiliste
  - ensemble de règles par défaut
  - matrice de conditionnelles
  - réseau neuronal maxmin
- Cela suggère un usage plus large de la logique possibiliste et de la théorie des possibilités qualitatives en KRR & ML

*On pourrait faire une revue des travaux similaire pour la théorie des possibilités numérique....*